הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 1מ1 – 104041

מבחן סוף סמסטר מועד א', חורף - 05.02.23

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 5 שאלות בחירה מרובה, שכל אחת 7 נקודות, ושאלה אחת עם 3 סעיפים של נכון או לא נכון שכל סעיף הוא 3 נקודות. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה.

1. נתונה $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. אזי

(א) $\int_0^1 f(x)dx=1$

(ב) $f(x)$ פונקציה עולה.

(ג) $f(x)$ אינה חסומה.

(ד) הפונקציה גזירה באפס והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0,0)$ הוא $y=0$.***

(ה) $y=0$ היא אסימפטוטה משופעת באינסוף.

2. נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I=\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)dx, \quad II=\int_0^1 \ln x dx$$

(א) שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים***

(ב) שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים

(ג) I אינו מתכנס ו־ II מתכנס

(ד) I מתכנס ו־ II אינו מתכנס

3. נתונים הטורים

$$I=\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^{(-1)^n+\frac{3}{2}}}, \quad II=\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\arctan\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)$$

(א) I מתכנס ו־II אינו מתכנס

(ב) שני הטורים אינם מתכנסים

(ג) I אינו מתכנס ו־II מתכנס***

(ד) שני הטורים מתכנסים

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(א) אם ל־ $f(x)$ אין מקסימום מקומי אז $f(x)$ פונקציה עולה.

(ב) אם לכל x קיים y כך ש־ $x<y$ וגם $f(x)+1<f(y)$, אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

(ג) אם $f(x)$ גזירה 2 פעמים בקטע $[0,1]$ וגם $f(0)=f'(0)=0$ ולכל $0\le x\le 1$ מתקיים כי $|f''(x)|\le 1$, אז לכל $0\le x\le 1$ מתקיים כי $|f(x)|\le 1$.***

(ד) אם $f(x)$ עולה ורציפה, אז היא גזירה.

(ה) אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה וגזירה לכל נקודה $x\neq 0$, אז $f'_-(0), f'_+(0)$ קיימים.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. סמנו את הטענה **<u>השגויה</u>**.

(א) אם f גזירה בכל נקודה, והנגזרת שלה פונקציה עולה ממש, ויש ל־ f אסימפטוטה משופעת באינסוף, אז הגרף של f אינו חותך את גרף האסימפטוטה המשופעת.

(ב) אם f עולה, אך לא עולה ממש, אז יש $a<b$ כך ש־ $f'(x)=0$ לכל $a<x<b$.

(ג) אם לכל $n\geq 1$ הפונקציה f חסומה בקטע $\left(-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ אז היא חסומה בקטע $(-1,1)$.***

(ד) אם ל־ f יש אסימפטוטה מאונכת ב־ 0 אז יש לפונקציה נקודת אי רציפות עיקרית ב־ 0.

6. בשאלה זו 3 סעיפים. סמנו בכל סעיף אם מה שרשום נכון או לא נכון.

(א) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה עבורה $f'(x)$ זוגית, אז $f(x)$ פונקציה אי־זוגית.

נכון **<u>לא נכון</u>**

(ב) אם $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ פונקציה רציפה אז:

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt<\infty \iff \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(t)dt<\infty.$$

<u>נכון</u> **לא נכון**

(ג) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וגם לכל $a>0$ מתקיים כי $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$, אז $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=0$.

נכון **<u>לא נכון</u>**

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

7. (29 נקודות)

(א) (5 נקודות) נסחו את משפט לגרנג'.

(ב) (12 נקודות) הוכיחו את משפט לגרנג'.

(ג) (12 נקודות) נניח כי $f(x)$ גזירה בכל נקודה וכי $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. הוכיחו כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2} = 0.$$

פתרון: לכל $x > 1$ מתקיים כי $x^2 > x$ וגם $0 < x^2 - x < x^2$ ולכן

$$0 < \frac{x^2 - x}{x^2} < 1.$$

הפונקציה f גזירה בקטע $[x, x^2]$ ולכן, לפי לגרנג', קיימת נקודה $x < c(x) < x^2$ עבורה

$$f'\big(c(x)\big) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} \implies f(x^2) - f(x) = f'\big(c(x)\big)(x^2 - x)$$

שנותן כי

$$\left|\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2}\right| = \left|\frac{f'\big(c(x)\big)(x^2 - x)}{x^2}\right| \le |f'\big(c(x)\big)|$$

כיוון ש־ $x < c(x)$ אז לפי פיצה $\lim_{x\to\infty} c(x) = \infty$ ולכן לפי גבול של הרכבה

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} f'\big(c(x)\big) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} |f'\big(c(x)\big)| = 0$$

ולכן

$$0 \le \left|\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2}\right| \le |f'\big(c(x)\big)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

ולכן לפי סנדביץ,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2} = 0.$$

פתרון חלופי: אחרי

$$\left|\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2}\right| = \left|\frac{f'\big(c(x)\big)(x^2 - x)}{x^2}\right| \le |f'\big(c(x)\big)|.$$

יהי $\varepsilon > 0$. קיים $x_0 > 0$ כך שכאשר $x > x_0$ אז

$$|f'(x)| = |f'(x) - 0| < \varepsilon.$$

לכן, כאשר $x > x_0$ אז $c(x) > x > x_0$ ולכן

$$\left|\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2} - 0\right| = \left|\frac{f(x^2) - f(x)}{x^2}\right| \le |f'\big(c(x)\big)| < \varepsilon.$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2} = 0.$$

8. (27 נקודות)

(א) (9 נקודות)

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{2x+8}{x^2+6x+13}dx$$

פתרון:

$$\int \frac{2x+8}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{2x+6+2}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx + \int \frac{2}{x^2+6x+13}dx =$$

$$= \ln|x^2+6x+13| + 2\int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \ln|x^2+6x+13| + 2\int \frac{dx}{(x+3)^2+2^2} =$$

$$= \ln|x^2+6x+13| + 2\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C = \ln|x^2+6x+13| + \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$$

(ב) (9 נקודות)

מיצאו מספר רציונלי שהמרחק שלו מהמספר $\sqrt[3]{10}=(10)^{\frac{1}{3}}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{400}$.

פתרון: נשתמש בפולינום טיילור סביב $a=8$ עבור $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ עבור $x=10$. כיוון שנוסחת השארית לפי משפט טיילור נותנת שלכל $n\geq 0$ קיים $8<c<10$ עבורו

$$R_n(10)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(10-8)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot 2^{n+1}$$

אז, בפרט, $0<\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\leq\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$.

$$f(x_{=}x^{\frac{1}{3}},\ f(8)=2,\ T_0(x)=2$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}},\ f'(8)=\frac{1}{12},\ T_1(x)=2+\frac{1}{12}\cdot(x-8)$$
$$|R_0(10)|=\left|\frac{\frac{1}{3\cdot c^{\frac{2}{3}}}}{1!}\cdot 2^1\right|\leq\frac{2}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{6}$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f''(8)=-\frac{1}{144},\ T_2(x)=2+\frac{1}{12}\cdot(x-8)-\frac{1}{288}\cdot(x-8)^2$$
$$|R_1(10)|=\left|\frac{-\frac{2}{9\cdot c^{\frac{5}{3}}}}{2!}2^2\right|\leq\frac{2^3}{2\cdot 9\cdot 2^5}=\frac{1}{72}$$
$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$
$$|R_2(10)|=\left|\frac{\frac{10}{27\cdot c^{\frac{8}{3}}}}{3!}2^3\right|\leq\frac{10\cdot 2^3}{27\cdot 6\cdot 2^8}=\frac{5}{81\cdot 32}=\frac{5}{2,592}\leq\frac{1}{400}$$

כאשר השתמשנו באי שוויונים בעובדה שכיוון ש־ $8<c<10$ אז $0<\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\leq\frac{1}{2}$.
לכן, $T_2(10)$ הוא מה שאנו מחפשים.

$$T_2(x)=2+\frac{1}{12}\cdot(x-8)-\frac{1}{288}\cdot(x-8)^2$$

$$T_2(10)=2+\frac{1}{12}\cdot(10-8)-\frac{1}{288}\cdot(10-8)^2=2+\frac{1}{6}-\frac{1}{72}.$$

(ג) (9 נקודות)

חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים במובן הרחב, או הסבירו למה אינו קיים במובן הרחב:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\int\limits_{x^6}^{0}\sin\sqrt{t}dt}{x^9}$$

פתרון: כיוון ש־ $\sin\sqrt{t}$ רציפה בקטע $[0,\infty)$ כהרכבה של רציפות, וגם x^6 אי שלילית וגזירה, לכן לפי המשפט היסודי

$$\int\limits_{x^6}^{0}\sin\sqrt{t}dt$$

פונקציה גזירה בכל נקודה, ובפרט

$$\lim_{x\to 0^-}\int\limits_{x^6}^{0}\sin\sqrt{t}dt=\int\limits_{0}^{0}\sin\sqrt{t}dt=0$$

ולכן, אפשר להשתמש בלופיטל

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\int\limits_{x^6}^{0}\sin\sqrt{t}dt}{x^9}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin\left(\sqrt{x^6}\right)6x^5}{9x^8}=_{x<0}\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin\left(-x^3\right)6x^5}{9x^8}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{2}{3}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש־

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

וביחד עם גבול של הרכבה, כיוון ש־ $x^3\neq 0$ לכל $x\neq 0$ וכיוון ש־ $x^3\xrightarrow[x\to 0]{}0$, אז

$$\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}1\implies\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}\xrightarrow[x\to 0^-]{}1$$